Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA 3 – TEOREMA DOS RESÍDUOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

(1) Seja f a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1} \ .$$

(a) Determine e classifique as singularidades de f.

(b) Utilize o teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz \ ,$$

onde γ_R é a fronteira do semicírculo

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq R,\ \operatorname{Im} z \geq 0\} \ ,$$

de raio $R > 1$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(c) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz \right| \leq \frac{R\pi}{R^4-1} \ ,$$

onde Γ_R é a porção de γ_R correspondente à semicircunferência

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0\} \ .$$

(d) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx \ .$$

Resolução:

(a) *As singularidades de f são os zeros de z^4+1:*

$$\begin{aligned}
z^4+1=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{i\pi}} \\
&\Longleftrightarrow \quad z = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4} \ , \ k=0,1,2,3 \\
&\Longleftrightarrow \quad z = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \ \textit{ ou } \ z = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\qquad\quad \textit{ ou } \ z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \ \textit{ ou } \ z = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \ .
\end{aligned}$$

Cada uma destas quatro singularidades é um pólo simples porque o seguinte limite existe e é não nulo ($k = 0,1,2,3$):

$$\lim_{z \to e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}} \left[(z - e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}) \frac{1}{z^4+1} \right] = \lim_{z \to e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4} e^{-3i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

onde na primeira igualdade se empregou a regra de Cauchy para resolver a indeterminação $(\frac{0}{0})$.

(b) *Pelo teorema dos resíduos, o integral pedido é igual a* $2\pi i$ *vezes a soma dos resíduos nas singularidades de* f *situadas na região limitada pelo caminho. Os pólos*

$$z_1 \overset{def}{=} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad e \qquad z_2 \overset{def}{=} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

são as únicas singularidades de f *na região limitada pelo caminho* γ_R. *Usa-se a fórmula para o cálculo de resíduos em pólos simples e a regra de Cauchy para resolver a indeterminação:*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_1} f &= \lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)\frac{1}{z^4+1}\right] \\
&= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_1^3} \\
&= \frac{1}{4}e^{i\frac{-3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_2} f &= \lim_{z\to z_2}\left[(z-z_2)\frac{1}{z^4+1}\right] \\
&= \lim_{z\to z_2}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_2^3} \\
&= \frac{1}{4}e^{i\frac{-9\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8} \ .
\end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\oint_{\gamma_R}\frac{1}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z_1} f + \mathrm{Res}_{z_2} f\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \ .$$

(c) *Tem-se a estimativa*

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| \le \int_{\Gamma_R}|f(z)|\,ds \le M_R\cdot L_R \ ,$$

onde M_R *é um majorante do módulo da função integranda* $f(z)=\frac{1}{z^4+1}$ *sobre o caminho* Γ_R *e* $L_R=\pi R$ *é o comprimento do caminho* Γ_R *(i.e., o comprimento duma semicircunferência de raio* R*). Para majorar* $\frac{1}{|z^4+1|}$, *minora-se o denominador. Pela desigualdade triangular, tem-se que*

$$|z^4+1| \ge |z^4| - 1 \ .$$

Sobre Γ_R, *tem-se* $|z|=R$. *Logo, como* $R>1$, *tem-se*

$$\left|\frac{1}{z^4+1}\right| = \frac{1}{|z^4+1|} \le \frac{1}{R^4-1} \ .$$

Tomando $M_R=\frac{1}{R^4-1}$, *fica*

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{1}{z^4+1}\,dz\right| \le \frac{\pi R}{R^4-1} \quad \text{para } R>1 \ .$$

(d) *Os integrais de* f *sobre* γ_R *e sobre* Γ_R *estão relacionados por:*

$$\int_{\gamma_R}\frac{1}{z^4+1}\,dz = \int_{-R}^{R}\frac{1}{x^4+1}\,dx + \int_{\Gamma_R}\frac{1}{z^4+1}\,dz \ ,$$

onde o integral em dx *representa um integral sobre um segmento do eixo real em* $\mathbb{C}$. *Pela alínea (b), o termo da esquerda é igual a* $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ *para qualquer* $R>1$. *Pela*

alínea (c), o segundo termo da direita tende para zero quando R tende para infinito. Portanto, fazendo $R \to +\infty$, obtém-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \ .$$

□

(2) (a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent na região $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ da função

$$g(z) = \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \ .$$

(b) Calcule o resíduo no ponto $z = 0$ da função

$$f(z) = \frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \ .$$

(c) Calcule

$$\oint_\gamma \left(\frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \right) dz \ ,$$

onde γ é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(d) Quais são os possíveis valores do integral

$$\oint_C \left(\frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \right) dz \ ,$$

onde C é uma curva fechada simples contida em $\mathbb{C} \setminus \{0, 4\}$?

Resolução:

(a) *A partir da série de Taylor da exponencial, deduz-se que o seguinte desenvolvimento é válido em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$:*

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} \ .$$

Logo, em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\left(z - z^3\right) e^{\frac{1}{z}} &= \left(z - z^3\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^{k-1}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^{k-3}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+1} \frac{1}{(1-k)!} z^k - \sum_{k=-\infty}^{+3} \frac{1}{(3-k)!} z^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+3} a_k z^k \ ,
\end{aligned}$$

onde

$$a_k = \begin{cases} -1 & \text{se } k = 2 \text{ ou } 3 \\ \frac{1}{(1-k)!} - \frac{1}{(3-k)!} & \text{se } k \le 1 \ . \end{cases}$$

Pela unicidade do desenvolvimento de uma função analítica numa coroa circular em série de potências positivas ou negativas (cf. teorema da série de Laurent), conclui-se

que o desenvolvimento em série de Laurent na região $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ da função $g(z)$ é

$$\sum_{k=-\infty}^{+1} \frac{1}{(1-k)!} z^k - \sum_{k=-\infty}^{+3} \frac{1}{(3-k)!} z^k = \sum_{k=-\infty}^{+3} a_k z^k \ ,$$

onde os coeficientes a_k estão definidos acima.

(b) *O resíduo de $f(z)$ no ponto $z=0$ é o coeficiente a_{-1} da potência $\frac{1}{z}$ no desenvolvimento de $f(z)$ em série de Laurent em potências de z válido num disco furado, $0<|z|<r$, onde $f(z)$ é analítica.*[1] *Como a série de Laurent da soma $\frac{1}{z-4} + \left(z-z^3\right) e^{\frac{1}{z}}$ é a soma das séries de Laurent de $\frac{1}{z-4}$ e de $\left(z-z^3\right) e^{\frac{1}{z}}$, tem-se que*

$$\mathrm{Res}_0 \left(\frac{1}{z-4} + \left(z-z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \right) = \mathrm{Res}_0 \frac{1}{z-4} + \mathrm{Res}_0 \left(\left(z-z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \right) \ .$$

Uma vez que $\frac{1}{z-4}$ é analítica em $z=0$, a série de Laurent de $\frac{1}{z-4}$ em torno de $z=0$ é uma série de Taylor, pelo que só tem potências positivas e consequentemente

$$\mathrm{Res}_0 \frac{1}{z-4} = 0 \ .$$

O resíduo de $g(z) = \left(z-z^3\right) e^{\frac{1}{z}}$ no ponto $z=0$ é o coeficiente da potência $\frac{1}{z}$ no desenvolvimento de $g(z)$ válido em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, o qual foi calculado na alínea (a). Conclui-se que

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_0 f &= \mathrm{Res}_0 \left(\left(z-z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \right) \\ &= \frac{1}{(1-(-1))!} - \frac{1}{(3-(-1))!} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \\ &= \frac{11}{24} \ . \end{aligned}$$

(c) *O caminho γ é fechado simples, orientado positivamente e envolve apenas uma singularidade da função integranda $f(z)$, nomeadamente o ponto $z=0$. Pelo teorema dos resíduos , o integral pedido é*

$$\oint_\gamma \left(\frac{1}{z-4} + \left(z-z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \right) dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}_0 f = \pi i \frac{11}{12} \ .$$

(d) *Pelo teorema dos resíduos, cada integral*

$$\oint_C \left(\frac{1}{z-4} + \left(z-z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \right) dz$$

é $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos nas singularidades envolvidas pelo caminho C, se o caminho for percorrido no sentido positivo, e é $-2\pi i$ vezes a soma dos resíduos nas singularidades envolvidas pelo caminho C, se o caminho for percorrido no sentido negativo.

A função integranda $f(z)$ tem apenas duas singularidades, $z=0$ e $z=4$. O ponto $z=4$ um pólo simples de $f(z)$ porque o limite

$$\lim_{z\to 4} \left[(z-4) \left(\frac{1}{z-4} + \left(z-z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \right) \right] = 1 \ .$$

existe e não é nulo. O resíduo de $f(z)$ em $z=4$, é

$$\mathrm{Res}_4 f = \lim_{z\to 4} \left[(z-4) \left(\frac{1}{z-4} + \left(z-z^3\right) e^{\frac{1}{z}} \right) \right] = 1 \ .$$

[1] Pode tomar-se $r \in]0,4[$ porque 4 é a distância de $z=0$ à singularidade mais próxima $z=4$.

Conclui-se que os possíveis valores do integral indicado são:

- $\frac{11}{24}$, *se* C *envolver apenas a singularidade* $z = 0$ *no sentido positivo,*
- $-\frac{11}{24}$, *se* C *envolver apenas a singularidade* $z = 0$ *no sentido negativo,*
- 1, *se* C *envolver apenas a singularidade* $z = 4$ *no sentido positivo,*
- -1, *se* C *envolver apenas a singularidade* $z = 4$ *no sentido negativo,*
- $\frac{35}{24}$, *se* C *envolver ambas as singularidades* $z = 0$ *e* $z = 4$ *no sentido positivo,*
- $-\frac{35}{24}$, *se* C *envolver ambas as singularidades* $z = 0$ *e* $z = 4$ *no sentido negativo, ou*
- 0, *se* C *não envolver nenhuma das singularidades.*

□

Comentário: *Tratando-se* C *de um caminho simples (i.e., que não se auto-intersecta), não é possível que dê mais do que uma volta a cada singularidade.* ♢

Nas respostas aos exercícios seguintes,
indique o intervalo de definição das soluções que apresenta
e inclua uma verificação dessas soluções.

(3) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2+1}$;

(b) $\frac{dy}{dt} = t \sin t + \frac{1}{t^2-1}$.

Resolução:

(a) *Resolve-se por primitivação:*

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2+1} \\ \iff \quad & y(t) = \int \frac{t}{t^2+1}\, dt + c \\ \iff \quad & y(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + c = \ln\sqrt{t^2+1} + c\ , \end{aligned}$$

onde c *representa uma constante real arbitrária.*

Solução geral:

$$y(t) = \ln\sqrt{t^2+1} + c\ , \qquad \text{com } c \in \mathbb{R}\ .$$

Intervalo de definição: $\mathbb{R}$.

Verificação:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln\sqrt{t^2+1} + c) = \frac{\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{t^2+1} \qquad \text{– ok!}$$

(b) *A função* $\frac{1}{t^2-1}$ *está definida em* $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. *Em qualquer intervalo contido em* $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, *a equação dada resolve-se por primitivação:*

$$\frac{dy}{dt} = t\sin t + \frac{1}{t^2-1} \quad \iff \quad y(t) = \int t\sin t\, dt + \int \frac{1}{t^2-1}\, dt + c\ ,$$

onde c representa uma constante real arbitrária. Uma primitiva de $t\sin t$ encontra-se primitivando por partes[2]*:*

$$\int t\sin t\,dt = -t\cos t - \int(-\cos t)\,dt = \sin t - t\cos t\ .$$

Recorrendo a decomposição em fracções simples,

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\ ,$$

determina-se uma primitiva de $\frac{1}{t^2-1}$:

$$\frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{|t-1|}{|t+1|} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\ .$$

Conclui-se que, para $t\in]-\infty,-1[$, $t\in]-1,1[$ ou $t\in]1,+\infty[$,

$$\frac{dy}{dt} = t\sin t + \frac{1}{t^2-1} \iff y(t) = \sin t - t\cos t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c\ ,$$

onde c representa uma constante real arbitrária.
<u>Solução geral:</u>

$$y(t) = \sin t - t\cos t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c\ , \qquad \text{com } c\in\mathbb{R}\ .$$

<u>Intervalo de definição:</u> $]-\infty,-1[$ *ou* $]-1,1[$ *ou* $]1,\infty[$.
<u>Verificação:</u>

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sin t - t\cos t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c\right)\\
&= \cos t - \cos t + t\sin t + \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dt}\frac{t-1}{t+1}}{\frac{t-1}{t+1}}\\
&= t\sin t + \frac{1}{2}\frac{\frac{t+1-t+1}{(t+1)^2}}{\frac{t-1}{t+1}}\\
&= t\sin t + \frac{1}{(t-1)(t+1)} \qquad \text{– ok!}
\end{aligned}$$

□

Comentário: *A equação dada em (b) tem três famílias infinitas de soluções, cada família parametrizada por $c\in\mathbb{R}$. As três famílias correspondem aos três possíveis intervalos de definição: $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ e $]1,\infty[$.* ♢

(4) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y = 0$;

(b) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t-3}y = \sin t$.

[2] Recordar que $\int uv' = uv - \int u'v$, devido à regra de derivação para um produto.

Resolução:

(a) *Esta equação só faz sentido para* $t \neq 0$.

Na vizinhança de um instante onde $y \neq 0$, *a equação dada pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis:*

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y = 0 \quad &\iff \quad \frac{\dot y}{y} = -\frac{1}{t^2} \\
&\iff \quad \int \frac{\dot y}{y}\,dt = -\int \frac{1}{t^2}\,dt + c\ , \quad \text{onde } c \in \mathbb{R} \\
&\iff \quad \int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{t} + c \\
&\iff \quad \ln|y| = \frac{1}{t} + c \\
&\iff \quad |y(t)| = e^c e^{\frac{1}{t}} \\
&\iff \quad y(t) = ke^{\frac{1}{t}}\ , \qquad \text{onde } k \neq 0\ .
\end{aligned}$$

Nota-se que, se uma solução $y(t)$ *não se anula num instante* t_0, *então* $y(t)$ *também não se anula em qualquer outro instante* t *onde esteja definida – reparar na expressão de* $y(t)$ *como produto de uma constante não nula pela exponencial que nunca se anula. Deduz-se que, se uma solução* $y(t)$ *se anula num instante* t_0, *então* $y(t)$ *terá que ser a função identicamente nula, a qual é de facto solução como se pode verificar substituindo na equação. A solução identicamente nula pode ser escrita na forma* $ke^{\frac{1}{t}}$ *escolhendo* $k = 0$.

Solução geral:

$$y(t) = ke^{\frac{1}{t}} \qquad \text{com } k \in \mathbb{R}\ .$$

Intervalo de definição: $]-\infty, 0[$ *ou* $]0, +\infty[$.

Verificação:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}ke^{\frac{1}{t}} = -k\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}} \\
\frac{1}{t^2}y &= \frac{1}{t^2}ke^{\frac{1}{t}} \\
\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y &= 0 \qquad \text{– ok!}
\end{aligned}$$

Comentário: *Esta equação é linear homogénea. Podia ter sido resolvida aplicando a fórmula geral para a solução dessas equações.* ♢

(b) *Esta equação é linear. Aplicando a fórmula geral para a solução de equações deste tipo, obtém-se*

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t-3}y = \sin t \\
\iff \quad & y(t) = e^{-\int \frac{1}{t-3}\,dt}\left(k + \int e^{\int \frac{1}{t-3}\,dt}\sin t\,dt\right)\ , \quad \text{onde } k \in \mathbb{R}\ .
\end{aligned}$$

Se se escolher $\int \frac{1}{t-3}\,dt = \ln|t-3|$, *fica*

$$e^{-\int \frac{1}{t-3}\,dt} = \frac{1}{|t-3|}$$

e

$$\begin{aligned}
\int e^{\int \frac{1}{t-3}\,dt}\sin t\,dt &= \int |t-3|\sin t\,dt \\
&= \frac{|t-3|}{t-3}\sin t - |t-3|\cos t\ ,
\end{aligned}$$

onde se primitivou por partes, para os casos $t-3>0$ e $t-3<0$.
Solução geral:

$$y(t)=\frac{c+\sin t}{t-3}-\cos t \qquad \text{com } c\in\mathbb{R}\ .$$

Intervalo de definição: $]-\infty,3[$ *ou* $]3,+\infty[$.
Verificação:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{c+\sin t}{t-3}-\cos t\right)\\ &= \frac{(t-3)\cos t-c-\sin t}{(t-3)^2}+\sin t\\ \frac{1}{t-3}y &= \frac{1}{t-3}\left(\frac{c+\sin t}{t-3}-\cos t\right)\\ &= \frac{c+\sin t-(t-3)\cos t}{(t-3)^2}\\ \frac{dy}{dt}+\frac{1}{t-3}y &= \sin t \qquad \text{– ok!}\end{aligned}$$

Comentário: *Em alternativa, para $t\neq 3$ poder-se-ia ter multiplicado a equação por $t-3$ e primitivado:*

$$\begin{aligned}&(t-3)\frac{dy}{dt}+y=(t-3)\sin t\\ \Longleftrightarrow\quad &\frac{d}{dt}\left[(t-3)y(t)\right]=(t-3)\sin t\\ \Longleftrightarrow\quad &(t-3)y(t)=\int\left[(t-3)\sin t\right]\,dt+c\\ \Longleftrightarrow\quad &y(t)=\frac{1}{t-3}\left[\sin t-(t-3)\cos t+c\right]\\ \Longleftrightarrow\quad &y(t)=\frac{\sin t}{t-3}-\cos t+\frac{c}{t-3}\ .\end{aligned}$$

◊

□

(5) Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\frac{dy}{dt}+ty=t\ ,\qquad y(0)=1;$

(b) $\frac{dy}{dt}+y=\cosh t\ ,\qquad y(0)=1.$

Resolução:

(a) *A EDO deste problema de valor inicial é uma equação linear. A solução será uma função dada, por exemplo, pela fórmula para a solução do PVI para equações lineares; em particular, essa solução é única. Ora observa-se que a função identicamente igual a 1 é solução deste PVI. Logo, essa é* a *solução.*
Solução: $y(t)=1$.
Intervalo de definição: $\mathbb{R}$.
Verificação: A condição inicial é satisfeita

$$y(0)=1$$

e a equação diferencial também:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 0 \\ ty(t) &= t \\ \frac{dy}{dt} + ty(t) &= t \qquad \text{– ok!} \end{aligned}$$

Comentário: *Se não se tivesse reparado logo que a função constante igual a 1 resolvia o problema dado, a mesma solução seria encontrada por qualquer dos métodos que se podem aplicar a equações lineares.* ♢

(b) *A EDO deste problema de valor inicial é linear. Aplicando a fórmula para a solução de um problema de valor inicial envolvendo uma equação linear, obtém-se a seguinte expressão para a solução:*

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int_0^t 1\,ds}\left(1 + \int_0^t e^{\int_0^s 1\,du} \cosh s\,ds\right) \\ &= e^{-t}\left(1 + \int_0^t e^s \cdot \frac{e^s + e^{-s}}{2}\,ds\right) \\ &= e^{-t}\left(1 + \int_0^t \frac{e^{2s}+1}{2}\,ds\right) \\ &= e^{-t}\left(1 + \frac{e^{2t}-1}{4} + \frac{t}{2}\right) \\ &= e^{-t} + \frac{e^t - e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2} \\ &= \frac{e^t}{4} + \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2}\ . \end{aligned}$$

Solução: $y(t) = \frac{e^t}{4} + \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2}$.
Intervalo de definição: $\mathbb{R}$.
Verificação: A condição inicial é satisfeita

$$y(0) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 1$$

e a equação diferencial também:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{e^t}{4} - \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{te^{-t}}{2} \\ y(t) &= \frac{e^t}{4} + \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2} \\ \frac{dy}{dt} + y(t) &= \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} \\ &= \cosh t \qquad \text{– ok!} \end{aligned}$$

Comentário: *Equivalentemente, poder-se-ia ter primeiro resolvido a EDO pelo método do factor de integração ou por aplicação da fórmula geral para a solução da equação linear, e depois fixado a constante de integração de maneira a satisfazer a condição inicial.* ♢

□

(6) Em $t = 0$ vivem 100 coelhos numa floresta. Sabendo que a taxa de natalidade dos coelhos é de 2 por cento por dia, e que, em média, 1 coelho é esmagado pela queda de uma árvore por dia, indique a população aproximada de coelhos ao fim de dez semanas, isto é, para $t = 70$.

Resolução: *Seja $y(t)$ uma aproximação diferenciável do número de coelhos no dia t para $t \geq 0$. Se não houvesse mortes, a população de coelhos cresceria exponencialmente de acordo com a lei $\frac{dy}{dt} = 0.02y(t)$. Como também morre 1 coelho por dia, a equação diferencial que serve de modelo para a evolução da população de coelhos é*

$$\frac{dy}{dt} = 0.02y(t) - 1$$

para $t \geq 0$. Como no dia inicial vivem 100 coelhos, tem-se $y(0) = 100$. Assim, vai-se primeiro procurar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 0.02y(t) - 1 \\ y(0) = 100 \ . \end{cases}$$

A equação diferencial envolvida neste problema de valor inicial é linear. Multiplicando-a pelo factor de integração $e^{-0.02t}$, obtém-se

$$\begin{aligned} & e^{-0.02t}\frac{dy}{dt} - 0.02e^{-0.02t}y(t) = -e^{-0.02t} \\ \iff \quad & \frac{d}{dt}\left(e^{-0.02t}y(t)\right) = -e^{-0.02t} \\ \iff \quad & e^{-0.02t}y(t) = -\int e^{-0.02t}\,dt + c \ , \qquad \textit{onde } c \in \mathbb{R} \\ \iff \quad & y(t) = e^{0.02t}(c + 50e^{-0.02t}) \\ \iff \quad & y(t) = ce^{0.02t} + 50 \ . \end{aligned}$$

A condição inicial impõe que

$$100 = ce^0 + 50 \quad \Longrightarrow \quad c = 50 \ .$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 50e^{0.02t} + 50 \ .$$

Para $t = 70$, tem-se

$$y(70) = 50e^{1.4} + 50 \simeq 252.78 \ .$$

Conclui-se que, ao fim de dez semanas, a população aproximada de coelhos é 253.
<u>Verificação do PVI</u>: A condição inicial é satisfeita

$$y(0) = 50 + 50 = 100$$

e a equação diferencial também:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= e^{0.02t} \\ 0.02y - 1 &= e^{0.02t} + 1 - 1 = e^{0.02t} = \frac{dy}{dt} \qquad \textit{– ok!} \end{aligned}$$

□